

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC



BÙI THỊ LỢI

**BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN
CỰC TRỊ TRONG ĐẠI SỐ TỔ HỢP**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC



BÙI THỊ LỢI

**BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN
CỰC TRỊ TRONG ĐẠI SỐ TỔ HỢP**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60 46 01 13

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU**

THÁI NGUYÊN - 2017

i
MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN	ii
MỞ ĐẦU	iii
Chương 1. Nhị thức Newton và một số đẳng thức tổ hợp liên quan	1
1.1 Các tính chất của nhị thức Newton	1
1.2 Các tính chất của các số tổ hợp	3
1.3 Một số đẳng thức tổ hợp	5
1.4 Đa thức Newton và ứng dụng	12
1.4.1 Đa thức Newton	12
1.4.2 Biểu diễn đơn vị thành tổng các phân số Ai Cập với mẫu số lẻ	16
1.5 Một số dạng toán thi Olympic liên quan	21
1.5.1 Tính chia hết của biểu thức tổ hợp	21
1.5.2 Quan hệ đồng dư giữa các biểu thức tổ hợp	23
Chương 2. Bất đẳng thức trong tính toán tổ hợp	30
2.1 Các bất đẳng thức cơ bản trong đại số	30
2.2 Một số bài toán về bất đẳng thức trong tính toán tổ hợp	36
2.2.1 Phép biến đổi tương đương, phương pháp làm trội, làm giảm	36
2.2.2 Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản để chứng minh	39
Chương 3. Các dạng toán cực trị liên quan đến tổ hợp trong dãy số	42
3.1 Bất đẳng thức trong dãy số	42
3.1.1 Dãy sinh bởi hàm số	42
3.1.2 Ước lượng tích và tổng của một số dãy số	44
3.1.3 Bất đẳng thức trong tập rời rạc	47
3.2 Một số bài toán cực trị liên quan đến tổ hợp trong dãy số	49
3.3 Một số bài toán cực trị liên quan qua các đề thi Olympic	51
KẾT LUẬN	56
TÀI LIỆU THAM KHẢO	57

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được thực hiện tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn nhiệt tình của Giáo sư - Tiến sĩ khoa học Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin trân trọng bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn, động viên khích lệ và tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu luận văn.

Qua bản luận văn này, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới Ban Giám hiệu trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm khoa Toán - Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy và tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu trong suốt thời gian qua.

Tác giả xin cảm ơn Sở Giáo dục Đào tạo Ninh Bình và Trường THPT Yên Khánh A, nơi tôi đang công tác, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tôi hoàn thành nhiệm vụ học tập.

Tác giả cũng xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và tất cả mọi người đã quan tâm, động viên và giúp đỡ để tác giả có thể hoàn thành luận văn của mình.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 22 tháng 5 năm 2017

Tác giả

Bùi Thị Lợi

MỞ ĐẦU

Tổ hợp có vị trí rất quan trọng trong Toán học vì nó không những là một đối tượng nghiên cứu trọng tâm của Đại số và Giải tích mà còn là một công cụ đắc lực của toán rời rạc và lý thuyết trò chơi.

Ngoài ra, tổ hợp còn được sử dụng nhiều trong tính toán và ứng dụng. Trong các kì thi học sinh giỏi toán quốc gia và Olympic toán quốc tế thì các bài toán về tổ hợp cũng thường được đề cập đến và được xem như những bài toán rất khó của bậc phổ thông.

Hiện nay các tài liệu tham khảo về tổ hợp tuy có nhiều nhưng không được đề cập đầy đủ và hệ thống trong chương trình chính khóa bậc phổ thông. Vì vậy, việc khảo sát sâu hơn về các vấn đề tính toán tổ hợp và các dạng toán liên quan cho ta hiểu sâu sắc về lý thuyết cũng như các ứng dụng liên quan đến tổ hợp và toán rời rạc.

Luận văn "*Bất đẳng thức và các bài toán cực trị trong đại số tổ hợp*" trình bày một số vấn đề liên quan tính chất và các dạng toán ứng dụng liên quan đến tổ hợp.

Mục đích của luận văn nhằm thể hiện rõ vai trò quan trọng của tổ hợp trong các dạng toán thi HSG và Olympic quốc gia và quốc tế.

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận và 3 chương.

Chương 1. Nhị thức Newton và một số đẳng thức tổ hợp liên quan.

Chương 2. Bất đẳng thức trong tính toán tổ hợp.

Chương 3. Các dạng toán cực trị liên quan đến tổ hợp trong dãy số.

Tiếp theo, trong các chương đều trình bày một hệ thống bài tập áp dụng giải các đề thi HSG và Olympic liên quan.

Chương 1. Nhị thức Newton và một số đẳng thức tổ hợp liên quan

Trong chương này, tác giả nhắc lại công thức nhị thức Newton, các tính chất cơ bản của nhị thức Newton, các tính chất cơ bản của các số tổ hợp. Từ đó xây dựng và chứng minh được một số đẳng thức tổ hợp. Trình bày kết quả về đa thức Newton và ứng dụng. Tác giả cũng nêu một số dạng toán thi Olympic liên quan đến tính chia hết và quan hệ đồng dư giữa các biểu thức tổ hợp.

Các kết quả trong chương 1 được trích dẫn từ các tài liệu tham khảo [2], [3], [4], [7], [8] và [9].

1.1 Các tính chất của nhị thức Newton

Với a, b là các số thực và n là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 2, ta luôn có

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (1.1)$$

trong đó

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Quy ước: $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

Công thức (1.1) gọi là công thức nhị thức Newton.

Chứng minh. Với $n = 2$, ta có

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \sum_{k=0}^2 C_2^k a^{2-k} b^k.$$

Vậy (1.1) đúng với $n = 2$.

Giả sử (1.1) đúng với $n = m$; $m \in \mathbb{N}$; $m \geq 2$. Nghĩa là, ta có

$$(a + b)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^k. \quad (1.2)$$

Ta phải chứng minh (1.1) đúng với $n = m + 1$, tức là phải chứng minh

$$(a + b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k. \quad (1.3)$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
(a+b)^{m+1} &= (a+b)^m \cdot (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^k \cdot (a+b) \quad \text{theo (1.2)} \\
&= \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^{k+1} \\
&= C_m^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m-1} [(C_m^k + C_m^{k-1}) a^{m+1-k} b^k] + C_m^m b^{m+1} \\
&= C_{m+1}^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m-1} (C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k) + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

Vậy (1.3) đúng.

Suy ra (1.1) đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ (điều phải chứng minh).

Tính chất 1.1. Số số hạng của công thức khai triển (1.1) bằng $n + 1$.

Tính chất 1.2. Các hệ số tổ hợp của nhị thức cách đều hai số hạng đầu và cuối thì bằng nhau.

Tính chất 1.3. Số hạng tổng quát của khai triển nhị thức là số hạng thứ $k + 1$ và bằng

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \quad (k \in \mathbb{N}; k = \overline{0; n}).$$

Tính chất 1.4. Với $a = b = 1$, ta có

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

Tính chất 1.5. Với $a = 1, b = -1$, ta có

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0.$$

Tính chất 1.6 (Đẳng thức Vandermonde (Vandermonde's equality)).

$$\begin{aligned}
C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \dots + C_n^k C_m^0 &= C_{m+n}^k \\
(0 \leq k \leq m; 0 \leq k \leq n) &
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Chứng minh. Xét đa thức

$$P(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

$$Q(x) = (1+x)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k x^k.$$

$$R(x) = (1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k x^k.$$

Hệ số của x^k trong đa thức $P(x).Q(x)$ bằng

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \dots + C_n^k C_m^0.$$

Hệ số của x^k trong đa thức $R(x)$ bằng C_{m+n}^k .

Vì $R(x) = P(x)Q(x)$ nên $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \dots + C_n^k C_m^0 = C_{m+n}^k$.

Vậy đẳng thức (1.4) được chứng minh.

Nhận xét 1.1. Áp dụng đẳng thức (1.4) với $k = m = n$, ta có đẳng thức

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Tính chất 1.7 (Đẳng thức Vandermonde mở rộng). Cho $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ và $k = k_1 + k_2 + \dots + k_r$. Khi đó

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=k} C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} \dots C_{n_r}^{k_r} = C_{n_1+n_2+\dots+n_r}^k.$$

1.2 Các tính chất của các số tổ hợp

Tính chất 1.8 (Tính chất đối xứng). Với mọi số tự nhiên $n, k \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $0 \leq k \leq n$ ta có:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Tính chất 1.9 (Tính chất tam giác Pascal).

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Tính chất 1.10 (Công thức tính tổng theo cột).

$$\sum_{k=0}^n C_k^m = C_{n+1}^{m+1}.$$

Chứng minh. Áp dụng công thức Pascal, ta có:

$$\sum_{k=0}^n C_k^m = \sum_{k=0}^n (C_{k+1}^{m+1} - C_k^{m+1}) = C_{n+1}^{m+1} - C_0^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Nhận xét 1.2. Từ Tính chất 1.4, Tính chất 1.9 và Tính chất 1.10 ta có đẳng thức

$$C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots = 2^{n-1}.$$

Tính chất 1.11 (Công thức tính tổng theo đường chéo chính).

$$\sum_{k=0}^n C_{m+k}^k = C_{m+n+1}^m$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_{m+k}^k &= \sum_{k=0}^n C_{m+k}^m \quad (\text{sử dụng Tính chất 1.8}) \\ &= C_{m+n+1}^{m+1} \quad (\text{sử dụng Tính chất 1.10}) \\ &= C_{m+n+1}^n \quad (\text{sử dụng Tính chất 1.8}). \end{aligned}$$

Tính chất 1.12 (Công thức tính tổng theo đường chéo phụ liên quan đến số Fibonacci).

$$\sum_{k=0}^n C_{n-k}^k = F_{n+1}.$$

Qui ước $C_n^k = 0$, với $k > n$.

Chứng minh.

Với $n = 0, n = 1$ thì $C_0^0 = 1 = F_1, C_1^0 + C_1^1 = 1 = F_2$.

Giả sử công thức trên đúng đến $n - 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_{n-k}^k &= \sum_{k=0}^n C_{n-1-k}^{k-1} + \sum_{k=0}^n C_{n-1-k}^k \quad (\text{sử dụng Tính chất 1.9}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-k}^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-k}^k \\ &= F_{n-1} + F_n \quad (\text{sử dụng giả thiết quy nạp}) \\ &= F_{n+1} \quad (\text{sử dụng công thức truy hồi của dãy Fibonacci}). \end{aligned}$$

Tính chất 1.13 (Quy tắc hút). Với $n, k \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $0 < k \leq n$ ta có:

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}.$$

Chứng minh. Ta có $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$.

Tính chất 1.14 (Công thức lùi cơ số). Với $n, k \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $0 \leq k < n$ ta có:

$$C_n^k = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^k.$$

Chứng minh. Ta có $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{n-k} \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^k$.

Tính chất 1.15 (Tính đơn điệu (monotonicity)).

$$C_n^0 < C_n^1 < \dots < C_n^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1} = C_n^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} > \dots > C_n^n.$$

1.3 Một số đẳng thức tổ hợp

Trong phần này, để tính tổng liên quan đến tổ hợp hoặc chứng minh một đẳng thức tổ hợp, ta phải quan sát các số hạng trong tổng để tìm nhị thức cần khai triển, kết hợp tính chất của các số tổ hợp với các phép toán đạo hàm, tích phân hoặc các phép toán về số phức để giải bài toán.

Bài toán 1.1. Tính tổng

$$S_1 = C_{2n}^0 + \alpha^2 C_{2n}^2 + \alpha^4 C_{2n}^4 + \dots + \alpha^{2n} C_{2n}^{2n}. \quad (1.5)$$

$$S_2 = \alpha C_{2n}^1 + \alpha^3 C_{2n}^3 + \alpha^5 C_{2n}^5 + \dots + \alpha^{2n-2} C_{2n}^{2n-1}. \quad (1.6)$$

Lời giải. Xét khai triển

$$(1 + \alpha)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \alpha^k. \quad (1.7)$$

$$(1 - \alpha)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k \alpha^k. \quad (1.8)$$

Cộng từng vế hai đẳng thức (1.7) và (1.8), ta được

$$2S_1 = (1 + \alpha)^{2n} + (1 - \alpha)^{2n} \Leftrightarrow S_1 = \frac{(1 + \alpha)^{2n} + (1 - \alpha)^{2n}}{2}.$$

Trừ từng vế đẳng thức (1.7) cho đẳng thức (1.8), ta được

$$2S_2 = (1 + \alpha)^{2n} - (1 - \alpha)^{2n} \Leftrightarrow S_2 = \frac{(1 + \alpha)^{2n} - (1 - \alpha)^{2n}}{2}.$$

Bài toán 1.2. Tính tổng

$$S_3 = C_n^1 + 2\alpha C_n^2 + 3\alpha^2 C_n^3 + \dots + n\alpha^{n-1} C_n^n. \quad (1.9)$$

$$S_4 = C_{2n}^1 + 3C_{2n}^3 + 5C_{2n}^5 + \dots + (2n - 1)C_{2n}^{2n-1}. \quad (1.10)$$

Lời giải. Theo Tính chất 1.13, ta có

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} \Leftrightarrow k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}.$$